SCIREA Journal of Mathematics
http://www.scirea.org/journal/Mathematics
December 9, 2021
Volume 6, Issue 6, December 2021
https://doi.org/10.54647/mathematics11300

Points algébriques de degrés au plus 5 sur la courbe C d'équation affine $y^2 = 4x^5 + 1$

EL Hadji SOW, Moussa FALL, Oumar SALL

Laboratoire de Mathématiques et Applications (L.M.A.) Université Assane SECK Ziguinchor, Senegal

Email: elpythasow@yahoo.fr(EL Hadji SOW), moussafalls@yahoo.fr (Moussa FALL), osall@univ-zig.sn (Oumar SALL)

Abstract :

In this work, we determine the set of algebraic points of degree at most $\mathbb{Q}$ over on the curve C given by the affine equation $\mathrm{y}^2 = 4\mathrm{x}^5 + 1$. This result extends a result of Andrew R. Booker, Jeroen Sijsling, Andrew V. Sutherland, John Voight and Dan Yasak who described in [1] the set of rational points on this curve.

Keywords: Planes curves - Degree of algebraic points - Rationals points - Algebraic extensions - Jacobian

I. Introduction

Soit C une courbe algébrique lisse de genre g définie sur un corps de nombres K.

L'ensemble des points algébriques sur C définis sur Kest noté $C(K)$.

et $\bigcup_{[K:\mathbb{Q}]\leq d} C(K)$ l'ensemble des points algébriques sur C à coordonnées dans K de degrés au plus d sur $\mathbb{Q}$. Nous nous proposons d'étudier en détail les points algébriques de degrés au plus 5 sur $\mathbb{Q}$ sur la courbe C d'équation affine:

$$y^2 = 4x^5 + 1 \tag{1}$$

La courbe C est hyperelliptique de genre $g = 2$ et de rang nul d'après [1]. Notons $P = (0, 1)$, $\overline{P} = (0, -1)$ et ∞ le point à l'infini. Dans [1] Andrew R. Booker, Jeroen Sijsling, Andrew V. Sutherland, John Voight and Dan Yasak ont donné une description des points rationnels.Cette description s'énonce comme suit :

Proposition : Les points $\mathbb{Q}-$ rationnels sur la courbe C sont donnés par

$$C(\mathbb{Q}) = \{P, \overline{P}, \infty\} \tag{2}$$

Nous étendons ce résultat en donnant une description des points algébriques de degrés au plus 5 sur $\mathbb{Q}$. Nos outils essentiels sont:

- Le groupe de Mordell-Weil $J(\mathbb{Q})$ des points rationnels sur C sur $\mathbb{Q}$ de la jacobienne de C , (voir [1]),
- Le théorème d'Abel Jacobi, (voir [3],)
- Des systèmes linéaires sur la courbe C.

Notre résultat principal s'énonce comme suit:

Théorème :

1) L'ensemble des points quadratiques sur C est donné par S avec

$$S = \left\{\left(\alpha, \pm\sqrt{4\alpha^5 + 1}\right), \alpha \in \mathbb{Q}^*\right\}$$

2) L'ensemble des points cubiques sur C est donné par $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ avec

$$\mathcal{A} = \{(x, -1 - \alpha x^2) \mid \alpha \in \mathbb{Q}^* \ et\ x\ racine\ de\ C_1(x) = 4x^3 - \alpha^2x^2 - 2\alpha\}$$

$$\mathcal{B} = \{(x, 1 - \alpha x^2) \mid \alpha \in \mathbb{Q}^* \ et\ x\ racine\ de\ C_2(x) = 4x^3 - \alpha^2x^2 + 2\alpha\}$$

3) L'ensemble des points quartiques sur C est donné par $\mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3 \cup \mathcal{C}_4$ avec

$$\mathcal{C}_0 = \left\{\left(x, \pm\sqrt{4x^5 + 1}\right), \alpha \in \overline{\mathbb{Q}}, [\mathbb{Q}(x):\mathbb{Q} = 2]\right\}$$

$$\mathcal{C}_1 = \left\{\begin{matrix} (x, -1 - \alpha x(x + \beta)) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{Q}^* \ et\ x\ racine\ de \\ B_1(x) = 4x^4 - \alpha^2x^3 - 2\alpha^2\beta x^2 - (2\alpha + \alpha^2\beta^2)x - 2\alpha\beta \end{matrix}\right\}$$

$$\mathcal{C}_2 = \left\{ \begin{matrix} (x, -1-\alpha x^2(x+\beta)) \mid \alpha,\beta \in \mathbb{Q}^* et\ x\ racine\ de \\ B_2(x) = \alpha^2 x^4 + (2\alpha^2\beta - 4)x^3 + \alpha^2\beta^2 x^2 + 2\alpha x + 2\alpha\beta \end{matrix} \right\}$$

$$\mathcal{C}_3 = \left\{ \begin{matrix} (x, 1-\alpha x^2(x+\beta)) \mid \alpha,\beta \in \mathbb{Q}^* et\ x\ racine\ de \\ B_3(x) = \alpha^2 x^4 + (2\alpha^2\beta - 4)x^3 + \alpha^2\beta^2 x^2 - 2\alpha x - 2\alpha\beta \end{matrix} \right\}$$

$$\mathcal{C}_4 = \left\{ \begin{matrix} (x, 1-\alpha x(x+\beta)) \mid \alpha,\beta \in \mathbb{Q}^* et\ x\ racine\ de \\ B_4(x) = 4x^4 - \alpha^2 x^3 - 2\alpha^2\beta x^2 + (2\alpha - \alpha^2\beta^2)x + 2\alpha\beta \end{matrix} \right\}$$

4) L'ensemble des points quintiques sur C est donné par $\mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 \cup \mathcal{D}_3 \cup \mathcal{D}_4$ avec

$$\mathcal{D}_0 = \left\{ \begin{matrix} (x, (\alpha + \beta x(x+\gamma))) \mid \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{Q}^*\ et\ x\ racine\ de \\ B_4(x) = 4x^5 - [\alpha + \beta x(x+\gamma)]^2 + 1 \end{matrix} \right\}$$

$$\mathcal{D}_1 = \left\{ \begin{matrix} (x, -1-\alpha x(x^2+\beta x+\gamma)) \mid \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{Q}^*\ et\ x\ racine\ de \\ F_1(x) = \alpha^2 x(x^2+\beta x+\gamma)^2 - 4x^4 + 2\alpha(x^2+\beta x+\gamma) \end{matrix} \right\}$$

$$\mathcal{D}_2 = \left\{ \begin{matrix} \left(x, -1-\frac{\alpha}{x+\beta}x^2(x+\gamma)\right) \mid \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{Q}^*\ et\ x\ racine\ de \\ F_3(x) = 4x^3(x+\beta)^2 - \alpha^2 x^2(x+\gamma)^2 - 2\alpha(x+\gamma)(x+\beta) \end{matrix} \right\}$$

$$\mathcal{D}_3 = \left\{ \begin{matrix} \left(x, 1-\frac{\alpha}{x+\beta}x^2(x+\gamma)\right) \mid \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{Q}^*\ et\ x\ racine\ de \\ F_2(x) = 4x^3(x+\beta)^2 - \alpha^2 x^2(x+\gamma)^2 + 2\alpha(x+\gamma)(x+\beta) \end{matrix} \right\}$$

$$\mathcal{D}_4 = \left\{ \begin{matrix} (x, 1-\alpha x(x^2+\beta x+\gamma)) \mid \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{Q}^*\ et\ x\ racine\ de \\ F_1(x) = \alpha^2 x(x^2+\beta x+\gamma)^2 - 4x^4 - 2\alpha(x^2+\beta x+\gamma) \end{matrix} \right\}$$

II. Résultats auxiliaires

Pour un diviseur D sur C nous notons $\mathcal{L}(D)$ le $\overline{\mathbb{Q}}$-espace vectoriel des fonctions rationnelles F sur C telles que $F = 0$ ou $div(F) \geq -D$; $l(D)$ désigne la $\overline{\mathbb{Q}}$-dimensionde $\mathcal{L}(D)$. On montre dans [4] que le groupe de Mordell-Weil de la jacobienne $J(\mathbb{Q})$ de C

est isomorphe à $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Soient $x\ et\ y$ les fonctions rationnelles définies sur C par : $x(X,Y,Z) = \frac{X}{Z}\ et\ y(X,Y,Z) = \frac{Y}{Z}$

L'équation projective de la courbe C est :

$$C: Y^2Z^3 = 4X^5 + Z^5$$

On désigne par J la jacobienne de C et par $j(P)$ la classe notée $[P - \infty]$ de $P - \infty$, c'est à dire que j est le plongement jacobien $C \to J(\mathbb{Q})$.

Soit $\theta = e^{i\frac{\pi}{2}}$ dans $\mathbb{C}$. Posons $B_k = \left(\sqrt[5]{\frac{1}{4}}\theta^{2k+1}, 0\right)$ pour $k = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Désignons par $C^{'}.C$ le cycle d'intersection d'une courbe algébrique C' définie sur $\mathbb{Q}$ et C.

Lemme 1 :

- $div(x) = P + \overline{P} - 2\infty$
- $div(y) = B_0 + B_1 + B_2 + B_3 + B_4 - 5\infty$
- $div(y - 1) = 5P - 5\infty$
- $div(y + 1) = 5\overline{P} - 5\infty$

Preuve

Calculons seulement $div(x)$ et en procédant de la même manière, on trouve les autres.

On a $div(x) = div\left(\frac{X}{Z}\right) = (X = 0).C - (Z = 0).C$.

Pour $X = 0$, on a $Y^2Z^3 = Z^5$ d'après (1), ce qui donne $Z^3 = 0$ ou $Y^2 = Z^2$.

D'une part pour Pour $X = 0$, on a $Z^3 = 0$; avec $Y = 1$ on obtient donc le point $\infty = (0,1, 0)$ avec multiplicité 3.

D'autre part pour $X = 0$, on a $Y = Z$ ou $Y = Z$; avec $Z = 1$ on obtient donc les points $P = (0,1, 1)$ avec multiplicité 1 et $\overline{P} = (0, -1, 1)$avec multiplicité 1.

D'où $(X = 0).C = P + \overline{P} - 3\infty$. (i)

De même pour $Z = 0$, alors on a $X^5 = 0$ d'après (3); et pour $Y = 1$, on a le point point $\infty = (0,1, 0)$ avec multiplicité 5. D'où $(Z = 0).C = 5\infty$. (ii)

Les relations (i) et (ii) entraînent que $div(x) = P + \overline{P} - 2\infty$.

Conséquences du lemme 1 : $5\mathrm{j}(\mathrm{P}) = 5\mathrm{j}(\overline{P}) = 0$ et $\mathrm{j}(\mathrm{P}) + \mathrm{j}(\overline{P}) = 0$.

Lemme 2 :

- $\mathcal{L}(\infty) = \langle 1 \rangle$
- $\mathcal{L}(2\infty) = \langle 1, x \rangle = \mathcal{L}(3\infty)$
- $\mathcal{L}(4\infty) = \langle 1, x, x^2 \rangle$
- $\mathcal{L}(5\infty) = \langle 1, x, x^2, y \rangle$
- $\mathcal{L}(6\infty) = \langle 1, x, x^2, y, x^3 \rangle$
- $\mathcal{L}(7\infty) = \langle 1, x, x^2, y, x^3, xy \rangle$

Preuve Résulte du lemme 1

Lemme 3: $\mathrm{J}(\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \langle [P-\infty] \rangle = \{[P-\infty],\ a \in \{0,1,2,3,4\}\}$

III. Démonstration du théorème

1. Points quadratiques sur $\boldsymbol{C}$

L'ensemble des points quadratiques sur C est donné par S avec

$$S = \left\{\left(\alpha,\ \pm\sqrt{4\alpha^5+1}\right), \alpha \in \mathbb{Q}^*\right\}$$

Preuve

Soit $R \in C(\overline{\mathbb{Q}})$ avec$[\mathbb{Q}(R){:}\mathbb{Q} = 2]$. Notons R_1 et R_2 les conjugués de Galois de R. Travaillons avec $t = [R_1 + R_2 - 2\infty] \in \mathrm{J}(\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, d'où $t = [R_1 + R_2 - 2\infty] = aj(P) =- aj(\overline{P})$; $0 \leq a \leq 4$ $(*)$.

On remarque que $R \notin \{\infty,\ P,\ \overline{P}\}$. Selon la valeur de a, on a les cas suivants :

Cas $\boldsymbol{a = 0}$

La relation $(*)$ devient $[R_1 + R_2 - 2\infty]$. Le théorème d'Abel Jacobi entraine l'existence d'une fonction rationnelle F sur $\mathbb{Q}$ telle que $div(F) = R_1 + R_2 - 2\infty$

donc $F \in \mathcal{L}(2\infty)$, d'où $F(x) = a_1 + a_2x$ $avec$ $a_2 \neq 0$. Aux points R_i, on a $a_1 + a_2x = 0$ donc $x =- \frac{a_1}{a_2} = \alpha$. En remplaçant x par α dans (1), on a: $y^2 = 4\alpha^5 + 1$

et par suite on a: $y =\pm \sqrt{4\alpha^5+1}$

On a ainsi une famille de points quadratiques

$$S = \left\{\left(\alpha,\ \pm\sqrt{4\alpha^5+1}\right), \alpha \in \mathbb{Q}^*\right\}$$

Cas $\boldsymbol{a = 1}$

La relation $(*)$ devient $[R_1 + R_2 - 2\infty] = j(P) =- j(\overline{P})$. Le théorème d'Abel Jacobi entraine l'existence d'une fonction rationnelle F sur $\mathbb{Q}$ telle que $div(F) = R_1 + R_2 + \overline{P} - 3\infty$

donc $F \in \mathcal{L}(3\infty)$ et comme $\mathcal{L}(3\infty) = \mathcal{L}(2\infty)$, $\overline{P}$ devrait être égal à ∞ ; ce qui est absurde.

Cas $\boldsymbol{a = 2}$

La relation $(*)$ devient $[R_1 + R_2 - 2\infty] = 2j(P) =- 2j(\overline{P})$. Le théorème d'Abel Jacobi entraine l'existence d'une fonction rationnelle F sur $\mathbb{Q}$ telle que $div(F) = R_1 + R_2 + 2\overline{P} - 4\infty$

donc $F \in \mathcal{L}(4\infty)$, d'où $F(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 \ avec \ a_3 \neq 0$ et comme $ord_{\overline{P}}(F) = 2$, on doit avoir $a_1 = a_2 = 0$, donc $F(x) = a_3x^2$ et on devrait avoir $R_1 = R_2 = P$, ce qui est absurde.

Cas $\boldsymbol{a} = 3$

La relation $(*)$ devient $[R_1 + R_2 - 2\infty] = 3j(P) =- 2j(P)$. Le théorème d'Abel Jacobi entraine l'existence d'une fonction rationnelle F sur $\mathbb{Q}$ telle que $div(F) = R_1 + R_2 + 2P - 4\infty$

donc $F \in \mathcal{L}(4\infty)$, d'où $F(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 \ avec \ a_3 \neq 0$ et comme $ord_P(F) = 2$, on doit avoir $a_1 = a_2 = 0$, donc $F(x) = a_3x^2$ et on devrait avoir $R_1 = R_2 = \overline{P}$, ce qui est absurde.

Cas $\boldsymbol{a} = 4$

La relation $(*)$ devient $[R_1 + R_2 - 2\infty] = 4j(P) =- j(P)$. Le théorème d'Abel Jacobi entraine l'existence d'une fonction rationnelle F sur $\mathbb{Q}$ telle que $div(F) = R_1 + R_2 + P - 3\infty$

donc $F \in \mathcal{L}(3\infty)$ et comme $\mathcal{L}(2\infty) = \mathcal{L}(3\infty)$, P devrait être égal à ∞ ; ce qui est absurde.

Conclusion: L'ensemble des points quadratiques sur C est:

$$S = \left\{\left(\alpha, \pm\sqrt{4\alpha^5 + 1}\right), \alpha \in \mathbb{Q}^*\right\}$$

2. Points cubiques sur $\boldsymbol{C}$

L'ensemble des points cubiques sur C est donné par $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ avec

$$\mathcal{A} = \{(x, -1 - \alpha x^2) \mid \alpha \in \mathbb{Q}^* \ et\ x\ racine\ de\ C_1(x) = 4x^3 - \alpha^2x^2 - 2\alpha\}$$

$$\mathcal{B} = \{(x, 1 - \alpha x^2) \mid \alpha \in \mathbb{Q}^* \ et\ x\ racine\ de\ C_2(x) = 4x^3 - \alpha^2x^2 + 2\alpha\}$$

Preuve

Soit $R \in C(\overline{\mathbb{Q}})$ avec $[\mathbb{Q}(R):\mathbb{Q} = 3]$. Notons R_1, R_2, R_3 les conjugués de Galois de R. Travaillons avec $t = [R_1 + R_2 + R_3 - 3\infty] \in J(\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, d'où $t = [R_1 + R_2 + R_3 - 3\infty] = aj(P) =- aj(\overline{P})$; $0 \leq a \leq 4$ $(*)$. On remarque que $R \notin \{\infty, P, \overline{P}\}$. Selon la valeur de a, on a les cas suivants :

Cas $a = 0$

La relation $(*)$ devient $R_1 + R_2 + R_3 - 3\infty = 0$. Le théorème d'Abel Jacobi entraine l'existence d'une fonction rationnelle F sur $\mathbb{Q}$ telle que $div(F) = R_1 + R_2 + R_3 - 3\infty$

donc $F \in \mathcal{L}(3\infty)$ et comme $\mathcal{L}(3\infty) = \mathcal{L}(2\infty)$, $\overline{P}$ devrait être égal à ∞ ; ce qui est absurde.

Cas $a = 1$

La relation $(*)$ devient $[R_1 + R_2 + R_3 - 3\infty] = j(P) =- j(\overline{P})$. Le théorème d'Abel Jacobi entraine l'existence d'une fonction rationnelle F sur $\mathbb{Q}$ telle que $div(F) = R_1 + R_2 + R_3 + \overline{P} - 4\infty$.

Donc $F \in \mathcal{L}(4\infty)$ d'où $F(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 \; avec \; a_3 \neq 0$.

Au point $\overline{P}$, on a $F(\overline{P}) = 0$ donc $a_1 = 0$ d'où $F(x) = x(a_2 + a_3x)$. Ensuite aux points R_i, on doit avoir $x(a_2 + a_3x) = 0$, donc $x \in \mathbb{Q}$ et par conséquent les R_i devraient être de degré ≤ 2.

Cas $a = 2$

La relation $(*)$ devient $[R_1 + R_2 + R_3 - 3\infty] = 2j(P) =- 2j(\overline{P})$. Le théorème d'Abel Jacobi entraine l'existence d'une fonction rationnelle F sur $\mathbb{Q}$ telle que $div(F) = R_1 + R_2 + R_3 + 2\overline{P} - 5\infty$.

Donc $F \in \mathcal{L}(5\infty)$ d'où $F(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4y + avec \; a_4 \neq 0$ et comme $ord_{\overline{P}}(F) = 2$, on doit avoir $a_1 - a_4 = 0 \; \; et \; a_2 = 0$ d'où $F(x) = a_4(y + 1) + a_3x^2$.

Aux points R_i, on doit avoir $a_4(y + 1) + a_3x^2 = 0$, d'où $y =- 1 - \frac{a_3}{a_4}x^2$. On voit que y est de la forme $y =- 1 - \alpha x^2$ avec $\alpha \in \mathbb{Q}^*$, et par suite on $y^2 = 4x^5 + 1 \Leftrightarrow (- 1 - \alpha x^2)^2 = 4x^5 + 1 \Leftrightarrow 4x^5 - \alpha^2x^4 - 2\alpha^2x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(4x^3 - \alpha^2x^2 - 2\alpha^2) = 0$.

On doit avoir $x^2 \neq 0 \; et \; \alpha \in \mathbb{Q}^*$, on obtient une famille de points cubiques

$$\mathcal{A} = \{(x, - 1 - \alpha x^2) \mid \alpha \in \mathbb{Q}^* \; et \; x \; racine \; de \; C_1(x) = 4x^3 - \alpha^2x^2 - 2\alpha\}$$

Cas $a = 3$

La relation $(*)$ devient $[R_1 + R_2 + R_3 - 3\infty] = 3j(P) =- 2j(P)$. Le théorème d'Abel Jacobi entraine l'existence d'une fonction rationnelle F sur $\mathbb{Q}$ telle que $div(F) = R_1 + R_2 + R_3 + 2P - 5\infty$.

Donc $F \in \mathcal{L}(5\infty)$ d'où $F(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4y + avec \; a_4 \neq 0$ et comme $ord_P(F) = 2$, on doit avoir $a_1 + a_4 = 0 \; \; et \; a_2 = 0$ d'où $F(x) = a_4(y - 1) + a_3x^2$.

Aux points R_i, on doit avoir $a_4(y-1)+a_3x^2=0$, d'où $y=1-\frac{a_3}{a_4}x^2$. On voit que y est de la forme $y=1-\alpha x^2$ avec $\alpha\in\mathbb{Q}^*$, et par suite on $y^2=4x^5+1 \Leftrightarrow (1-\alpha x^2)^2=4x^5+1 \Leftrightarrow$ $4x^5-\alpha^2x^4+2\alpha^2x^2=0 \Leftrightarrow x^2(4x^3-\alpha^2x^2+2\alpha^2)=0$.

On doit avoir $x^2\neq 0\ et\ \alpha\in\mathbb{Q}^*$, on obtient une famille de points cubiques

$$\mathcal{B}=\{(x,1-\alpha x^2)\mid \alpha\in\mathbb{Q}^*\ et\ x\ racine\ de\ C_2(x)=4x^3-\alpha^2x^2+2\alpha\}$$

Cas $a=4$

La relation $(*)$ devient $[R_1+R_2+R_3-3\infty]=4j(P)=-j(P)$. Le théorème d'Abel Jacobi entraine l'existence d'une fonction rationnelle F sur $\mathbb{Q}$ telle que $div(F)=R_1+R_2+R_3+P-4\infty$.

Donc $F\in\mathcal{L}(4\infty)$ d'où $F(x)=a_1+a_2x+a_3x^2\ avec\ a_3\neq 0$.

Au point P, on a $F(P)=0$ donc $a_1=0$ d'où $F(x)=x(a_2+a_3x)$. Ensuite aux points R_i, on doit avoir $x(a_2+a_3x)=0$, donc $x\in\mathbb{Q}$ et par conséquent les R_i devraient être de degré ≤ 2.

3. Points quartiques sur C

L'ensemble des points quartiques sur C est donné par $\mathcal{C}_0\cup\mathcal{C}_1\cup\mathcal{C}_2\cup\mathcal{C}_3\cup\mathcal{C}_4$ avec

$$\mathcal{C}_0=\left\{\left(x,\ \pm\sqrt{4x^5+1}\right),\alpha\in\overline{\mathbb{Q}},[\mathbb{Q}(x):\mathbb{Q}=2]\right\}$$

$$\mathcal{C}_1=\begin{Bmatrix}(x,\ -1-\alpha x(x+\beta))\mid\alpha,\beta\in\mathbb{Q}^*\ et\ x\ racine\ de\\ B_1(x)=4x^4-\alpha^2x^3-2\alpha^2\beta x^2-(2\alpha+\alpha^2\beta^2)x-2\alpha\beta\end{Bmatrix}$$

$$\mathcal{C}_2=\begin{Bmatrix}(x,\ -1-\alpha x^2(x+\beta))\mid\alpha,\beta\in\mathbb{Q}^*et\ x\ racine\ de\\ B_2(x)=\alpha^2x^4+(2\alpha^2\beta-4)x^3+\alpha^2\beta^2x^2+2\alpha x+2\alpha\beta\end{Bmatrix}$$

$$\mathcal{C}_3=\begin{Bmatrix}(x,1-\alpha x^2(x+\beta))\mid\alpha,\beta\in\mathbb{Q}^*et\ x\ racine\ de\\ B_3(x)=\alpha^2x^4+(2\alpha^2\beta-4)x^3+\alpha^2\beta^2x^2-2\alpha x-2\alpha\beta\end{Bmatrix}$$

$$\mathcal{C}_4=\begin{Bmatrix}(x,1-\alpha x(x+\beta))\mid\alpha,\beta\in\mathbb{Q}^*et\ x\ racine\ de\\ B_4(x)=4x^4-\alpha^2x^3-2\alpha^2\beta x^2+(2\alpha-\alpha^2\beta^2)x+2\alpha\beta\end{Bmatrix}$$

Preuve

Soit $R\in C(\overline{\mathbb{Q}})$ avec $[\mathbb{Q}(R):\mathbb{Q}]=4$. Notons R_1,R_2,R_3,R_4 les conjugués de Galois de R. Travaillons avec $t=[R_1+R_2+R_3+R_4-4\infty]\in J(\mathbb{Q})\cong\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, d'où $t=[R_1+R_2+R_3+R_4-4\infty]=aj(P)=-aj(\overline{P})$; $0\leq a\leq 4$ $(*)$. On remarque que $R\notin\{\infty,\ P,\ \overline{P}\}$. Selon la valeur de a, on a les cas suivants :

Cas $a=0$

La relation $(*)$ devient $R_1 + R_2 + R_3 + R_4 - 4\infty = 0$. Le théorème d'Abel Jacobi entraine l'existence d'une fonction rationnelle F sur $\mathbb{Q}$ telle que $div(F) = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 - 4\infty$

donc $F \in \mathcal{L}(4\infty)$. Donc $F \in \mathcal{L}(4\infty)$ d'où $F(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 \ avec \ a_3 \neq 0$.

Aux points R_i, on a $a_1 + a_2x + a_3x^2 = 0$. La relation $y^2 = 4x^5 + 1$ donne $y =\pm \sqrt{4x^5 + 1}$.

On obtient une famille de point quartiques

$$\mathcal{C}_0 = \left\{\left(x, \pm \sqrt{4x^5 + 1}\right), \alpha \in \overline{\mathbb{Q}}, [\mathbb{Q}(x):\mathbb{Q} = \mathbb{2}]\right\}$$

Cas $\boldsymbol{a} = 1$

La relation $(*)$ devient $[R_1 + R_2 + R_3 + R_4 - 4\infty] = j(P) =- j(\overline{P})$. Le théorème d'Abel Jacobi entraine l'existence d'une fonction rationnelle F sur $\mathbb{Q}$ telle que

$div(F) = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + \overline{P} - 5\infty$. Donc $F \in \mathcal{L}(5\infty)$ d'où

$F(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4y \ avec \ a_4 \neq 0$. Au point $\overline{P}$, on a $F(\overline{P}) = 0$ donc $a_1 - a_4 = 0$ d'où $F(x) = a_4(y + 1) + a_2x + a_3x^2$. Ensuite aux points R_i , on a $a_4(y + 1) + a_2x + a_3x^2 = 0$, d'où

$y =- 1 - \frac{a_2}{a_4}x - \frac{a_3}{a_4}x^2 =- 1 - \frac{a_3}{a_4}x\left(x + \frac{a_2}{a_3}\right)$. On voit que y est de la forme $y =- 1 - \alpha x(x + \beta)$ avec $\alpha \ et \ \beta \in \mathbb{Q}^*$; et par suite on a $y^2 = 4x^5 + 1 \Leftrightarrow (- 1 - \alpha x(x + \beta))^2 \Leftrightarrow$

$4x^5 - \alpha^2x^4 - 2\alpha^2\beta x^3 - (2\alpha + \alpha^2\beta^2)x^2 - 2\alpha\beta x = 0 \Leftrightarrow x(4x^4 - \alpha^2x^3 - 2\alpha^2\beta x^2 - (2\alpha + \alpha^2\beta^2)x - 2\alpha\beta) = 0$. On doit avoir $x \neq 0 \ et \ \alpha,\beta \in \mathbb{Q}^*$, on obtient une famille de points quartiques

$$\mathcal{C}_1 = \left\{\begin{matrix} (x, - 1 - \alpha x(x + \beta)) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{Q}^* \ et \ x \ racine \ de \\ B_1(x) = 4x^4 - \alpha^2x^3 - 2\alpha^2\beta x^2 - (2\alpha + \alpha^2\beta^2)x - 2\alpha\beta \end{matrix}\right\}$$

Cas $\boldsymbol{a} = 2$

La relation $(*)$ devient $[R_1 + R_2 + R_3 + R_4 - 4\infty] = 2j(P) =- 2j(\overline{P})$. Le théorème d'Abel Jacobi entraine l'existence d'une fonction rationnelle F sur $\mathbb{Q}$ telle que

$div(F) = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + 2\overline{P} - 6\infty$. Donc $F \in \mathcal{L}(6\infty)$ d'où

$F(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4y + a_5x^3 \ avec \ a_5 \neq 0$.

La fonction F est d'ordre $2 \ en \ \overline{P}$ donc $a_1 - a_4 = 0 \ et \ a_2 = 0$ d'où $F(x) = a_4(y + 1) + a_3x^2 + a_5x^3$. Ensuite aux points R_i, on a $a_4(y + 1) + a_3x^2 + a_5x^3 = 0$, d'où

$y =- 1 - \frac{a_5}{a_4}x^2\left(x + \frac{a_3}{a_5}\right)$. On voit que y est de la forme $y =- 1 - \alpha x^2(x+\beta)$ avec $\alpha\ et\ \beta\ \in \mathbb{Q}^*$; et par suite on a $y^2 = 4x^5 + 1 \Leftrightarrow (-1 - \alpha x^2(x+\beta))^2 \Leftrightarrow$

$\alpha^2x^6 + (2\alpha^2\beta - 4)x^5 + \alpha^2\beta^2x^4 + 2\alpha x^3 + 2\alpha\beta x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2[\alpha^2x^4 + (2\alpha^2\beta - 4)x^3 + \alpha^2\beta^2x^2 + 2\alpha x + 2\alpha\beta] = 0$. On doit avoir $x \neq 0\ et\ \alpha,\beta \in \mathbb{Q}^*$, on obtient une famille de points quartiques

$$\mathcal{C}_2 = \left\{\begin{matrix} (x,\ -1 - \alpha x^2(x+\beta)) \mid \alpha,\beta \in \mathbb{Q}^* et\ x\ racine\ de \\ B_2(x) = \alpha^2x^4 + (2\alpha^2\beta - 4)x^3 + \alpha^2\beta^2x^2 + 2\alpha x + 2\alpha\beta \end{matrix}\right\}$$

Cas $a = 3$

La relation $(*)$ devient $[R_1 + R_2 + R_3 + R_4 - 4\infty] = 3j(P) =- 2j(P)$. Le théorème d'Abel Jacobi entraine l'existence d'une fonction rationnelle F sur $\mathbb{Q}$ telle que

$div(F) = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + 2P - 6\infty$. Donc $F \in \mathcal{L}(6\infty)$ d'où

$F(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4y + a_5x^3\ avec\ a_5 \neq 0.$

La fonction F est d'ordre $2\ en\ P$ donc $a_1 + a_4 = 0\ et\ a_2 = 0$ d'où $F(x) = a_4(y-1) + a_3x^2 + a_5x^3$. Ensuite aux points R_i, on a $a_4(y-1) + a_3x^2 + a_5x^3 = 0$, d'où

$y = 1 - \frac{a_5}{a_4}x^2\left(x + \frac{a_3}{a_5}\right)$. On voit que y est de la forme $y = 1 - \alpha x^2(x+\beta)$ avec $\alpha\ et\ \beta\ \in \mathbb{Q}^*$; et par suite on a $y^2 = 4x^5 + 1 \Leftrightarrow (1 - \alpha x^2(x+\beta))^2 \Leftrightarrow$

$\alpha^2x^6 + (2\alpha^2\beta - 4)x^5 + \alpha^2\beta^2x^4 - 2\alpha x^3 - 2\alpha\beta x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2[\alpha^2x^4 + (2\alpha^2\beta - 4)x^3 + \alpha^2\beta^2x^2 - 2\alpha x - 2\alpha\beta] = 0$. On doit avoir $x \neq 0\ et\ \alpha,\beta \in \mathbb{Q}^*$, on obtient une famille de points quartiques

$$\mathcal{C}_3 = \left\{\begin{matrix} (x,\ -1 - \alpha x^2(x+\beta)) \mid \alpha,\beta \in \mathbb{Q}^* et\ x\ racine\ de \\ B_2(x) = \alpha^2x^4 + (2\alpha^2\beta - 4)x^3 + \alpha^2\beta^2x^2 - 2\alpha x - 2\alpha\beta \end{matrix}\right\}$$

Cas $a = 4$

La relation $(*)$ devient $[R_1 + R_2 + R_3 + R_4 - 4\infty] = 4j(P) =- j(P)$. Le théorème d'Abel Jacobi entraine l'existence d'une fonction rationnelle F sur $\mathbb{Q}$ telle que

$div(F) = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + P - 5\infty$. Donc $F \in \mathcal{L}(5\infty)$ d'où

$F(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4y\ avec\ a_4 \neq 0$. Au point P, on a $F(P) = 0$ donc $a_1 + a_4 = 0$ d'où $F(x) = a_4(y-1) + a_2x + a_3x^2$. Ensuite aux points R_i, on a $a_4(y-1) + a_2x + a_3x^2 = 0$, d'où

$y = 1 - \frac{a_2}{a_4}x - \frac{a_3}{a_4}x^2 = 1 - \frac{a_3}{a_4}x\left(x + \frac{a_2}{a_3}\right)$. On voit que y est de la forme $y = 1 - \alpha x(x+\beta)$ avec α *et* $\beta \in \mathbb{Q}^*$; et par suite on a $y^2 = 4x^5 + 1 \Leftrightarrow (1 - \alpha x(x+\beta))^2 \Leftrightarrow$

$4x^5 - \alpha^2x^4 - 2\alpha^2\beta x^3 - (2\alpha + \alpha^2\beta^2)x^2 - 2\alpha\beta x = 0 \Leftrightarrow x(4x^4 - \alpha^2x^3 - 2\alpha^2\beta x^2 + (2\alpha + \alpha^2\beta^2)x + 2\alpha\beta) = 0$. On doit avoir $x \neq 0$ *et* $\alpha,\beta \in \mathbb{Q}^*$, on obtient une famille de points quartiques

$$\mathcal{C}_4 = \left\{ \begin{matrix} (x, -1 - \alpha x(x+\beta)) \mid \alpha,\beta \in \mathbb{Q}^* \; et \; x \; racine \; de \\ B_4(x) = 4x^4 - \alpha^2x^3 - 2\alpha^2\beta x^2 + (2\alpha + \alpha^2\beta^2)x + 2\alpha\beta \end{matrix} \right\}$$

4. Points quintiques sur C

L'ensemble des points quintiques sur C est donné par $\mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 \cup \mathcal{D}_3 \cup \mathcal{D}_4$ avec

$$\mathcal{D}_0 = \left\{ \begin{matrix} (x, (\alpha + \beta x(x+\gamma))) \mid \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{Q}^* \; et \; x \; racine \; de \\ B_4(x) = 4x^5 - [\alpha + \beta x(x+\gamma)]^2 + 1 \end{matrix} \right\}$$

$$\mathcal{D}_1 = \left\{ \begin{matrix} (x, -1 - \alpha x(x^2 + \beta x + \gamma)) \mid \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{Q}^* \; et \; x \; racine \; de \\ F_1(x) = \alpha^2x(x^2 + \beta x + \gamma)^2 - 4x^4 + 2\alpha(x^2 + \beta x + \gamma) \end{matrix} \right\}$$

$$\mathcal{D}_2 = \left\{ \begin{matrix} \left(x, -1 - \dfrac{\alpha}{x+\beta}x^2(x+\gamma)\right) \mid \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{Q}^* \; et \; x \; racine \; de \\ F_3(x) = 4x^3(x+\beta)^2 - \alpha^2x^2(x+\gamma)^2 - 2\alpha(x+\gamma)(x+\beta) \end{matrix} \right\}$$

$$\mathcal{D}_3 = \left\{ \begin{matrix} \left(x, 1 - \dfrac{\alpha}{x+\beta}x^2(x+\gamma)\right) \mid \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{Q}^* \; et \; x \; racine \; de \\ F_2(x) = 4x^3(x+\beta)^2 - \alpha^2x^2(x+\gamma)^2 + 2\alpha(x+\gamma)(x+\beta) \end{matrix} \right\}$$

$$\mathcal{D}_4 = \left\{ \begin{matrix} (x, 1 - \alpha x(x^2 + \beta x + \gamma)) \mid \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{Q}^* \; et \; x \; racine \; de \\ F_1(x) = \alpha^2x(x^2 + \beta x + \gamma)^2 - 4x^4 - 2\alpha(x^2 + \beta x + \gamma) \end{matrix} \right\}$$

Preuve

Soit $R \in C(\overline{\mathbb{Q}})$ avec $[\mathbb{Q}(R):\mathbb{Q}] = 5$. Notons R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 les conjugués de Galois de R. Travaillons avec $t = [R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 - 5\infty] \in J(\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, d'où $t = [R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 - 5\infty] = aj(P) = -aj(\overline{P})$; $0 \leq a \leq 4$ $(*)$. On remarque que $R \notin \{\infty, P, \overline{P}\}$. Selon la valeur de a, on a les cas suivants :

Cas $a = 0$

La relation $(*)$ devient $[R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 - 5\infty] = 0$. Le théorème d'Abel Jacobi entraine l'existence d'une fonction rationnelle F sur $\mathbb{Q}$ telle que

$div(F) = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 - 5\infty$. Donc $F \in \mathcal{L}(5\infty)$ d'où

$F(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4y$ $avec$ $a_4 \neq 0$. Aux points R_i, on a $a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4y = 0$, d'où

$y =- \frac{a_1}{a_4} -- \frac{a_3}{a_4}x\left(x + \frac{a_2}{a_3}\right)$. On voit que y est de la forme $y = \alpha + \beta x(x + \gamma)$ avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}^*$; et par suite on a $y^2 = 4x^5 + 1 \Leftrightarrow [\alpha + \beta x(x + \gamma)]^2 \Leftrightarrow 4x^5 + 1 \Leftrightarrow 4x^5 - [\alpha + \beta x(x + \gamma)]^2 + 1 = 0$. On obtient une famille de points quintiques

$$\mathcal{D}_0 = \begin{Bmatrix} (x, (\alpha + \beta x(x + \gamma))) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}^* \, et \, x \, racine \, de \\ B_4(x) = 4x^5 - [\alpha + \beta x(x + \gamma)]^2 + 1 \end{Bmatrix}$$

Cas $\boldsymbol{a} = \mathbf{1}$

La relation $(*)$ devient $[R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 - 5\infty] = j(P) =- j(\overline{P})$. Le théorème d'Abel Jacobi entraine l'existence d'une fonction rationnelle F sur $\mathbb{Q}$ telle que

$div(F) = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 + \overline{P} - 6\infty$. Donc $F \in \mathcal{L}(6\infty)$ d'où

$F(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4y + a_5x^3$ $avec$ $a_5 \neq 0$.

Au point $\overline{P}$, on a $F(\overline{P}) = 0$ donc $a_1 - a_4 = 0$, d'où $F(x) = a_4(y + 1) + a_2x + a_3x^2 + a_5x^3$. Ensuite aux points R_i, on a $a_4(y + 1) + a_2x + a_3x^2 + a_5x^3 = 0$, d'où

$y =- 1 - \frac{a_5}{a_4}x\left(x^2 + \frac{a_3}{a_5}x + \frac{a_2}{a_5}\right)$. On voit que y est de la forme $y =- 1 - \alpha x(x^2 + \beta x + \gamma)$ avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}^*$; et par suite on a $y^2 = 4x^5 + 1 \Leftrightarrow (- 1 - \alpha x(x^2 + \beta x + \gamma))^2 = 4x^5 + 1 \Leftrightarrow$

$$x(\alpha^2 x(x^2 + \beta x + \gamma)^2 - 4x^4 + 2\alpha(x^2 + \beta x + \gamma)) = 0$$

On doit avoir $x \neq 0$ et $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}^*$, on obtient une famille de points quintiques

$$\mathcal{D}_1 = \begin{Bmatrix} (x, - 1 - \alpha x(x^2 + \beta x + \gamma)) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}^* et \, x \, racine \, de \\ \mathcal{F}_1(x) = \alpha^2 x(x^2 + \beta x + \gamma)^2 - 4x^4 + 2\alpha(x^2 + \beta x + \gamma) \end{Bmatrix}$$

Cas $\boldsymbol{a} = \mathbf{2}$

La relation $(*)$ devient $[R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 - 5\infty] = 2j(P) =- 2j(\overline{P})$. Le théorème d'Abel Jacobi entraine l'existence d'une fonction rationnelle F sur $\mathbb{Q}$ telle que

$div(F) = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 + 2\overline{P} - 7\infty$. Donc $F \in \mathcal{L}(7\infty)$ d'où

$F(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4y + a_5x^3 + a_6xy$ $avec$ $a_6 \neq 0$.

La fonction F est d'ordre 2 en $\overline{P}$ donc $a_1 - a_4 = 0$ et $a_2 - a_6 = 0$, et par suite on a

$F(x) = a_4(y + 1) + a_6x(y + 1) + a_3x^2 + a_5x^3$.

Aux points R_i, on doit avoir $a_4(y+1)+a_6x(y+1)+a_3x^2+a_5x^3=0$, d'où

$y=-1-\frac{a_5}{a_4+a_6x}x^2\left(x+\frac{a_3}{a_5}\right)$. On voit que y est de la forme $y=-1-\frac{\alpha}{x+\beta}x^2(x+\gamma)$ avec $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{Q}^*$; et par suite on a $y^2=4x^5+1 \Leftrightarrow \left(-1-\frac{\alpha}{x+\beta}x^2(x+\gamma)\right)^2=4x^5+1 \Leftrightarrow$

$$x^2(4x^3(x+\beta)^2-\alpha^2x^2(x+\gamma)^2-2\alpha(x+\alpha)(x+\beta))=0$$

On doit avoir $x^2\neq 0\ et\ \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{Q}^*$, on obtient une famille de points quintiques

$$\mathcal{D}_2=\left\{\begin{matrix}\left(x,-1-\dfrac{\alpha}{x+\beta}x^2(x+\gamma)\right) \mid \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{Q}^* et\ x\ racine\ de \\ \mathcal{F}_2(x)=4x^3(x+\beta)^2-\alpha^2x^2(x+\gamma)^2-2\alpha(x+\alpha)(x+\beta)\end{matrix}\right\}$$

Cas $a=3$

La relation $(*)$ devient $[R_1+R_2+R_3+R_4+R_5-5\infty]=3j(P)=-2j(P)$. Le théorème d'Abel Jacobi entraine l'existence d'une fonction rationnelle F sur $\mathbb{Q}$ telle que

$div(F)=R_1+R_2+R_3+R_4+R_5+2P-7\infty$. Donc $F\in\mathcal{L}(7\infty)$ d'où

$F(x)=a_1+a_2x+a_3x^2+a_4y+a_5x^3+a_6xy\ avec\ a_6\neq 0.$

La fonction F est d'ordre 2 $en\ P$ donc $a_1+a_4=0\ et\ a_2+a_6=0$, et par suite on a

$F(x)=a_4(y-1)+a_6x(y-1)+a_3x^2+a_5x^3.$

Aux points R_i, on doit avoir $a_4(y-1)+a_6x(y-1)+a_3x^2+a_5x^3=0$, d'où

$y=1-\frac{a_5}{a_4+a_6x}x^2\left(x+\frac{a_3}{a_5}\right)$. On voit que y est de la forme $y=1-\frac{\alpha}{x+\beta}x^2(x+\gamma)$ avec $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{Q}^*$; et par suite on a $y^2=4x^5+1 \Leftrightarrow \left(1-\frac{\alpha}{x+\beta}x^2(x+\gamma)\right)^2=4x^5+1 \Leftrightarrow$

$$x^2(4x^3(x+\beta)^2-\alpha^2x^2(x+\gamma)^2+2\alpha(x+\alpha)(x+\beta))=0$$

On doit avoir $x^2\neq 0\ et\ \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{Q}^*$, on obtient une famille de points quintiques

$$\mathcal{D}_3=\left\{\begin{matrix}\left(x,1-\dfrac{\alpha}{x+\beta}x^2(x+\gamma)\right) \mid \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{Q}^* et\ x\ racine\ de \\ \mathcal{F}_3(x)=4x^3(x+\beta)^2-\alpha^2x^2(x+\gamma)^2+2\alpha(x+\alpha)(x+\beta)\end{matrix}\right\}$$

Cas $a=4$

La relation $(*)$ devient $[R_1+R_2+R_3+R_4+R_5-5\infty]=4j(P)=-j(P)$. Le théorème d'Abel Jacobi entraine l'existence d'une fonction rationnelle F sur $\mathbb{Q}$ telle que

$div(F) = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 + P - 6\infty$. Donc $F \in \mathcal{L}(6\infty)$ d'où

$F(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4y + a_5x^3$ $avec$ $a_5 \neq 0$.

Au point $\overline{P}$, on a $F(\overline{P}) = 0$ donc $a_1 + a_4 = 0$, d'où $F(x) = a_4(y+1) + a_2x + a_3x^2 + a_5x^3$. Ensuite aux points R_i, on a $a_4(y+1) + a_2x + a_3x^2 + a_5x^3 = 0$, d'où

$y = 1 - \frac{a_5}{a_4}x\left(x^2 + \frac{a_3}{a_5}x + \frac{a_2}{a_5}\right)$. On voit que y est de la forme $y = 1 - \alpha x(x^2 + \beta x + \gamma)$ avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}^*$; et par suite on a $y^2 = 4x^5 + 1 \Leftrightarrow (1 - \alpha x(x^2 + \beta x + \gamma))^2 = 4x^5 + 1 \Leftrightarrow$

$$x(\alpha^2 x(x^2 + \beta x + \gamma)^2 - 4x^4 - 2\alpha(x^2 + \beta x + \gamma)) = 0$$

On doit avoir $x \neq 0$ et $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}^*$, on obtient une famille de points quintiques

$$\mathcal{D}_4 = \begin{Bmatrix} (x, 1 - \alpha x(x^2 + \beta x + \gamma)) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}^* et\ x\ racine\ de \\ \mathcal{F}_4(x) = \alpha^2 x(x^2 + \beta x + \gamma)^2 - 4x^4 - 2\alpha(x^2 + \beta x + \gamma) \end{Bmatrix}$$

Références

[1] Andrew R. Booker, Jeroen Sijsling, Andrew V. Sutherland, John Voight and Dan Yasak, (2016). A database of genus-2 curves over the rational numbers. LMS Journal of Computation and Mathematics, 19(A), 235-254.

[2] P. A. Griffiths, Introduction to algebraic curves, Translations of mathematical monographs volume 76. American Mathematical Society, Providence (1989).

[3] The LMFDB Collaboration, The L-functions and Modular Forms Database. Available at: http://www.lmfdb.org. [Online; accessed 8 November 2021]

[4] O. Sall, Points algébriques sur certains quotients de courbes de Fermat, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I 336 (2003) 117-120.

[5] O. Sall, M. Fall, C. M. Coly, Points algébriques de degré donné sur la courbe d'équation affine $y^2 = x^5 +$, International Journal Of Development Research Vol. 06, Issue, 11, pp. 10295-10300, November, 2016.